

MGR colorings for Seifert surfaces of oriented links

大阪大学 大学院理学研究科 数学専攻

新井克典 (Katsunori ARAI) *

概要

向き付けられたいくつかの S^1 の非交和 $S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1$ を S^3 へ埋め込んだ像を有向絡み目という。有向絡み目を境界とする S^3 内の（連結な）有向コンパクト曲面を、その有向絡み目のザイフェルト曲面と呼ぶ。有向絡み目のザイフェルト曲面は、有向絡み目の種々の不変量の構成において重要な役割を果たす。MGR は群とラックの構造を併せ持った代数系である。MGR を用いて、彩色不変量と呼ばれる S^3 内の境界付き有向コンパクト曲面の全同位不変量を得ることができる。本講演ではいくつかのザイフェルト曲面に対して彩色不変量を計算し、得られた結果について述べる。

1 ザイフェルト曲面

いくつかの向き付けられた S^1 の非交和 $S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1$ を $S^3 = \mathbb{R}^3 \sqcup \{\infty\}$ へ埋め込んだ像を有向絡み目という。特に 1 成分の有向絡み目を有向結び目と呼ぶ。2 つの有向絡み目 L, L' が S^3 の向きを保つ自己同相写像 $S^3 \rightarrow S^3$ で移り合うとき、 L と L' は全同位であるといい、 $L \cong L'$ と書く。

Definition 1.1. 3 次元球面 $S^3 = \mathbb{R}^3 \sqcup \{\infty\}$ 内の境界付き有向曲面 F が、有向絡み目 L のザイフェルト曲面であるとは、次の条件 (i)–(ii) を満たすことをいう。

- (i) F のどの連結成分も空でない境界を持つ。
- (ii) $\partial F \cong L$ である。

Remark 1.2. ザイフェルト曲面に対して、連結性を仮定する場合も多い。

Theorem 1.3 ([2, 7]). 任意の有向絡み目に対して、そのザイフェルト曲面が存在する。

有向絡み目のザイフェルト曲面 F と F' が S^3 の向きを保つ自己同相写像で移り合うとき、 F と F' が全同位であるといい、 $F \cong F'$ と書く。

任意のザイフェルト曲面 F は次の方法で空間 3 価グラフの図式 D を用いて表される (Fig. 1)。このとき、空間 3 価グラフの図式 D をザイフェルト曲面 F の図式と呼ぶ。

ザイフェルト曲面の図式に対して、ライデマイスター型の定理が成り立つことが知られている。

Theorem 1.4 ([5]). 2 つのザイフェルト曲面が全同位であることと、それらを表す 2 つの図式がライデマイスター変形 (Fig. 2) と S^2 上のアイソトピー変形で移り合うことは同値である。

* E-mail: u068111h@ecs.osaka-u.ac.jp

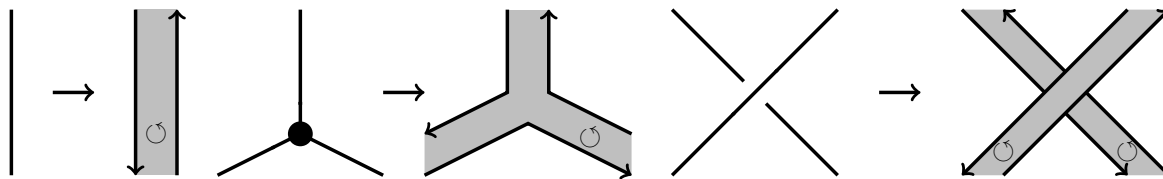


図1 空間3価グラフ図式を用いたザイフェルト曲面の構成

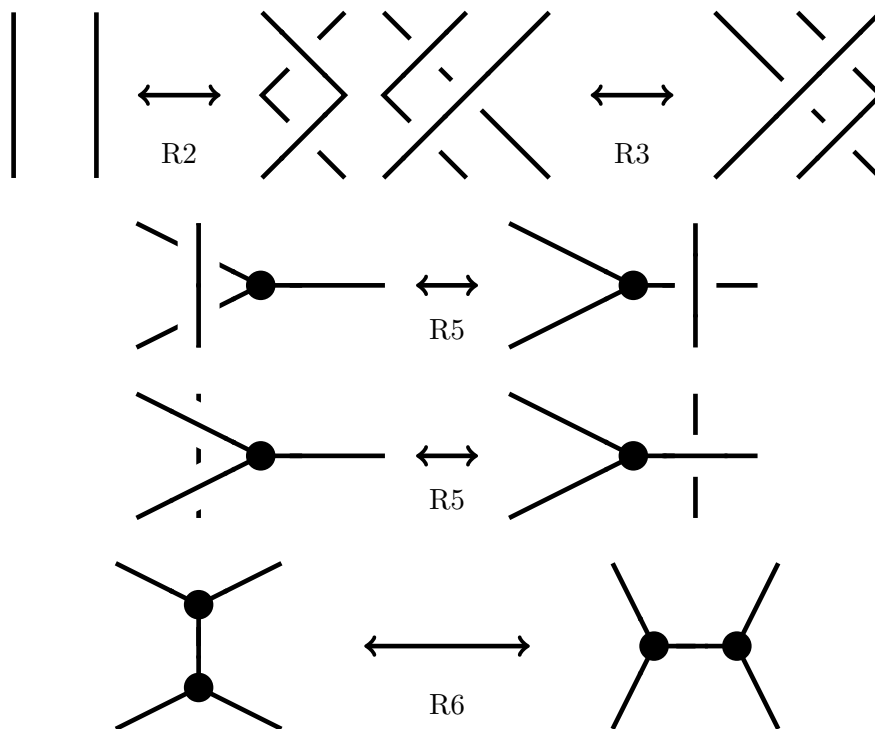


図2 ライデマイスター変形

空間3価グラフの図式 D を図式としてもつザイフェルト曲面を $F(D)$ で表すこととする.

Proposition 1.5. 有向絡み目のザイフェルト曲面の図式 D に対して, 次の操作 (図3) で得られる図式 D' を考える. このとき, $\partial F(D') = \partial F(D)$ である.

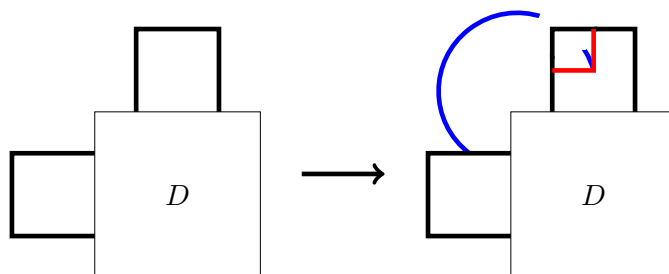


図3 境界を変えない図式の変形

2 ザイフェルト行列

K, K' を互いに交わらない有向結び目とする. $H_1(S^3 \setminus K) \cong \mathbb{Z}$ の生成元を表すメリディアンループのホモロジー類を $m \in H_1(S^3 \setminus K)$ とおく. $[K'] = n \cdot m \in H_1(S^3 \setminus K)$ を満たす整数 n を $\text{Lk}(K, K')$ と書く.

Definition 2.1. F を有向絡み目 L のザイフェルト曲面とする. F の向きに対応する正の法線方向を考える. 写像 $\phi: H_1(F) \times H_1(F) \rightarrow \mathbb{Z}$ を

$$\phi(x, y) = \text{Lk}(l_x^+, l_y)$$

で定める. ここで, l_x, l_y はホモロジー類 x, y の代表元で, l_x^+ は l_x を F の法線方向に平行移動したものである. $H_1(F)$ の基底の一つを選び, その基底に関する ϕ の表現行列を F のザイフェルト行列といい, M_F と書く.

次の命題は基底の取り方に依らず成立する.

Proposition 2.2. 有向絡み目のザイフェルト曲面 F と F' が全同位であるとき, あるユニモジュラー行列 P が存在して, $M_{F'} = {}^T P M_F P$ を満たす.

Definition 2.3. 2つの有向絡み目のザイフェルト曲面 F と F' の図式 D と D' がデルタ同値であるとは, D と D' がライデマイスター変形 (図 2) と次のデルタ変形 (図 4) で移り合うことをいう.

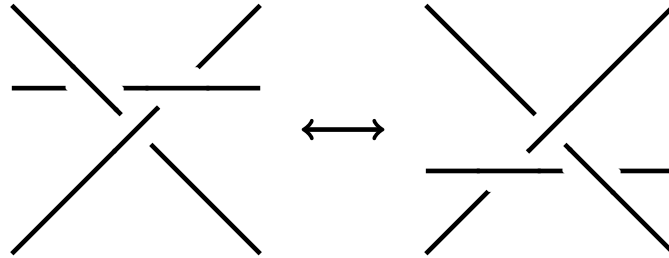


図 4 デルタ変形

Proposition 2.4. 2つの有向絡み目のザイフェルト曲面 F と F' の図式 D と D' がデルタ同値ならば, あるユニモジュラー行列 P が存在して, $M_F = {}^T P M_{F'} P$ が成り立つ.

3 MGR について

カンドル ([4, 6]) は, 結び目理論におけるライデマイスター変形に対応する代数系であり, 結び目理論の研究において重要な役割を果たす. 特に結び目群の一般化である結び目カンドルは, 結び目の弱同値の差を除いて完全不変量であることが知られている.

本章では, カンドルの一般化であるラック ([1]) と群の演算を併せ持った代数系である MGR を用いて, ザイフェルト曲面の不変量を構成する.

Definition 3.1 ([1]). 集合 R と R 上の二項演算 $\triangleleft$ の組 $(R, \triangleleft)$ がラックであるとは, 次の条件を満たすことをいう.

- 任意の $y \in R$ に対して, 写像 $S_y : R \rightarrow R, S_y(x) = x \triangleleft y$, は全単射である.
- 任意の $x, y, z \in R$ に対して, $(x \triangleleft y) \triangleleft z = (x \triangleleft z) \triangleleft (y \triangleleft z)$ を満たす.

Example 3.2. $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ とする. $R_n = (\mathbb{Z}_n, x \triangleleft y = 2y - x)$ を二面体ラックという.

Definition 3.3 ([3]). 群の非交和 $X = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ と X 上の二項演算 $* : X \times X \rightarrow X$ の組 $(X, *)$ が **MGR** であるとは次の条件を満たすことをいう.

- 任意の $\lambda \in \Lambda, x \in X, a, b \in G_\lambda$ に対して, $x * (ab) = (x * a) * b$ かつ $x * e_\lambda = x$ を満たす. ここで, $e_\lambda \in G_\lambda$ は群 G_λ の単位元である.
- 任意の $x, y, z \in X$ に対して, $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ を満たす.
- 任意の $\lambda \in \Lambda, x \in X, a, b \in G_\lambda$ に対して, ある $\mu \in \Lambda$ が存在して, $a * x, b * x \in G_\mu$ かつ $(ab) * x = (a * x)(b * x)$ を満たす.

MGR は Definition 3.1 の定義を満たす. 従ってラックである.

Example 3.4. $(R_3 \times \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_2 = \bigsqcup_{x \in R_3} (\{x\} \times \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_2$ は次の演算により MGR である.

$$((x, a), i) * ((y, b), j) = \begin{cases} ((x, a), i) & (b = 0) \\ ((2y - x, a), i + 1) & (b = 1) \end{cases}, \quad ((x, a), i)((x, b), j) = ((x, a + b), i + j).$$

有向絡み目のザイフェルト曲面の図式 D の Y 向きとは, 各頂点回りで沈点や湧点 (図 5) を持たない向きのことである. 有向絡み目のザイフェルト曲面図式に Y 向きを 1 つ指定したものを Y 向き付けられた図式と呼ぶ. 有向絡み目のザイフェルト曲面の Y 向き付けられた図式に対してもライデ

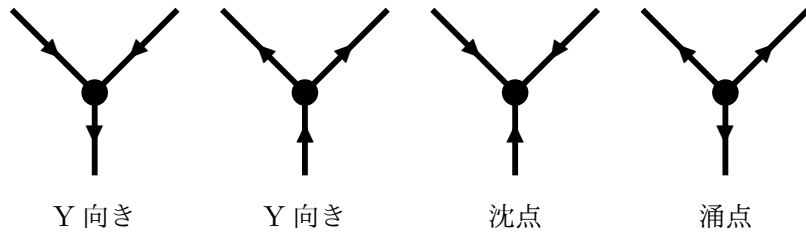


図 5 頂点周りの向き付け

マイスター変形が定義され, Theorem 1.4 と同様の定理が成り立つ.

有向絡み目のザイフェルト曲面の Y 向き付けられた図式の弧全体の集合を $\mathcal{A}(D)$ と表すこととする.

Definition 3.5. $X = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ を MGR, D をザイフェルト曲面の Y 向き付けられた図式とする. D の X 彩色とは次の条件を満たす写像 $C : \mathcal{A}(D) \rightarrow X$ のことをいう.

- D の各交差に対して, C は $C(a_i) * C(a_j) = C(a_k)$ を満たす. ここで, $a_i, a_j, a_k \in \mathcal{A}(D)$ は

図 6 の左図で表される弧である.

- D の各頂点に対して, C は $C(a_i), C(a_j) \in G_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ かつ $C(a_i)C(a_j) = C(a_k)$ を満たす. ここで $a_i, a_j, a_k \in \mathcal{A}(D)$ は図 6 の中央及び右図で表される弧である.

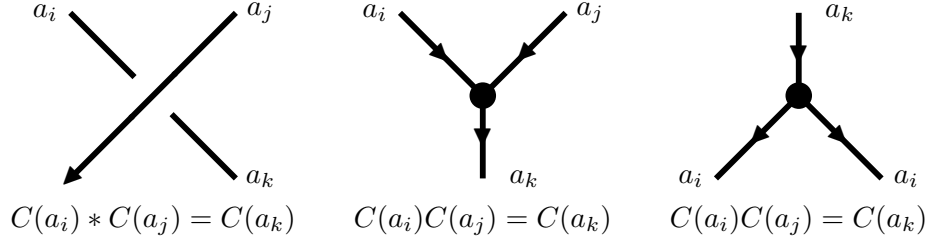


図 6 X 彩色条件

D の X 彩色全体の集合を $\text{Col}_X(D)$ と書く.

Theorem 3.6 ([3]). X を MGR とする. 2 つの有向絡み目のザイフェルト曲面の Y 向き付けられた図式 D と D' がライデマイスター変形で移り合うならば, $\text{Col}_X(D)$ と $\text{Col}_X(D')$ の間に全単射が存在する. 特に, $\text{Col}_X(D)$ の濃度は Y 向きの取り方に依らずザイフェルト曲面 $F(D)$ の不変量となる.

4 主定理

Theorem 4.1 (主結果). 自明な 2 成分絡み目のザイフェルト曲面の組 (F, F') が存在して次を満たす.

- (i) $F \not\cong F'$ を満たす.
- (ii) あるユニモジュラー行列 P が存在して, $M_F = {}^T P M_{F'} P$ を満たす.
- (iii) F と F' の S^3 内での正則近傍 $N(F)$ と $N(F')$ はハンドル体結び目として同値である, すなわち, $N(F)$ と $N(F')$ は S^3 の向きを保つ自己同相写像で移り合う.

証明の概略. (i) ザイフェルト曲面の図式 D, D' を図 7 で定める.

このとき, Proposition 1.5 より, $\partial F(D) \cong \partial F(D') \cong$ (自明な 2 成分絡み目) である.

D, D' に対して任意に Y 向きを与える. $X = (R_3 \times \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_2$ を Example 3.4 の MGR とする. このとき, $|\text{Col}_X(D)| \neq |\text{Col}_X(D')|$ であるので, Theorem 3.6 より $F(D) \not\cong F(D')$ である. この $F(D), F(D')$ をそれぞれ F, F' とすればよい.

(ii) Proposition 2.4 より従う.

(iii) ハンドル体結び目として,

$$N(F) \cong N(F') \cong (\text{種数 4 の自明なハンドル体結び目と三葉結び目の正則近傍の連結和})$$

である. □

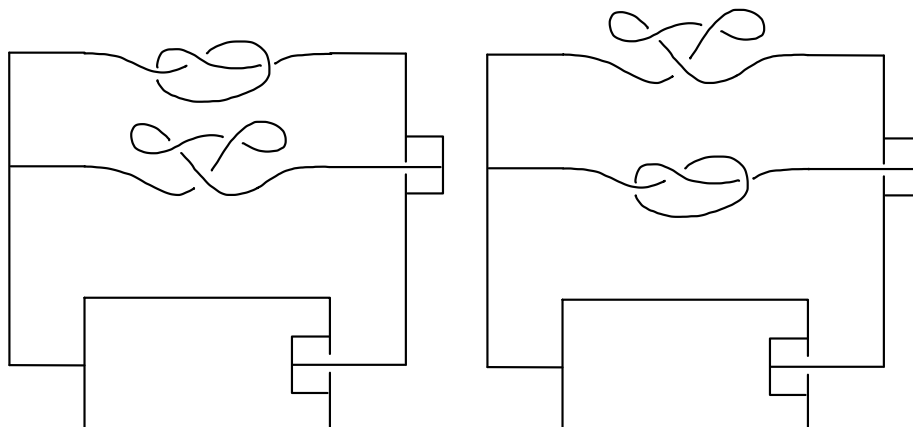


図7 D (左) と D' (右)

参考文献

- [1] Fenn, R., Rourke, C.: Racks and links in codimension two. J. Knot Theory Ramif. **1**, 343–406 (1992)
- [2] Frankl, F., Pontryagin, L.: Ein Satzesatz mit Anwendung die Dimensionstheorie. Math. Ann. **102**, 785–789 (1930)
- [3] Ishii, A., Matsuzaki, S., Murao, T.: A multiple group rack and oriented spatial surfaces. J. Knot Theory Ramif. **29**(7) (2020)
- [4] Joyce, D.: A classifying invariant of knots, the knot quandle. J. Pure Appl. Algebra. **23**, 37–65 (1982)
- [5] Matsuzaki, M.: A diagrammatic presentation and its characterization of non-split compact surfaces in the 3-sphere. J. Knot Theory Ramifications **30**(9), (2021)
- [6] Matveev, S.: Distributive groupoids in knot theory. Mat. Sb. (N. S.) **119**, 78–88 (1982)
- [7] Seifert, H.: Über das Geschlecht von Knoten. Math. Ann. **110**, 571–592 (1934)